2.8.22 Využití Pythagorovy věty I

Předpoklady: 020820

Pedagogická poznámka: Ve všech slovních úlohách „z praxe" se snažím používat běžnou terminologii. Pokud žáci slova neznají, mohou si je najít na internetu, nebo (což je samozřejmě daleko lepší) si jejich význam odvodit z kontextu.

Př. 1: Vypočti odmocniny a výsledek zapiš také jako desetinné číslo.
a) 2^{-2} b) 5^{-1} c) 10^{-2} d) $2^{-2}\cdot 5^{-1}$

a) $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0,25$ b) $5^{-1}=\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=0,2$

c) $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0,01$ d) $2^{-2}\cdot 5^{-1}=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}=\frac{5}{100}=0,05$

Př. 2: Trojúhelník *ABC* má délky stran 8; 15; 17. Je pravoúhlý?

Pokud je trojúhelník pravoúhlý, musí pro délky jeho stran platit Pythagorova věta:
$c^2=a^2+b^2$.

- $a^2+b^2=8^2+15^2=64+225=289$
- $c^2=17^2=289$

Pythagorova věta platí $\Rightarrow$ trojúhelník *ABC* je pravoúhlý.

Př. 3: Urči přeponu pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami 5 cm a 7 cm.

$c^2=a^2+b^2 \quad /\sqrt{\ }$

$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}\doteq 8,6$

Pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami 5 cm a 7 cm má přeponu o velikosti $\sqrt{74}$.

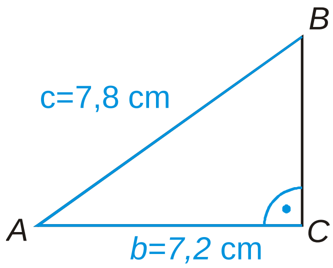
Př. 4: Urči odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku s přeponou 7,8 cm a odvěsnou 7,2 cm. Zkontroluj výsledek rýsováním.

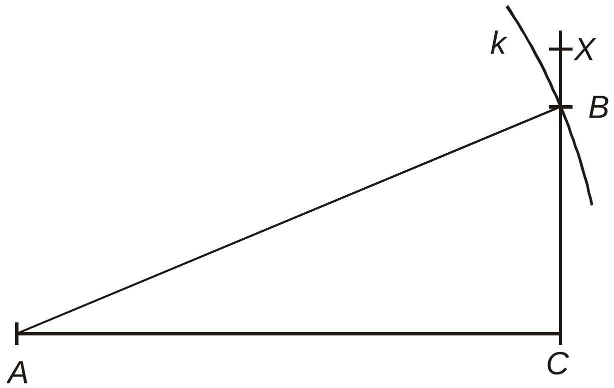
$c^2=a^2+b^2 \quad /-b^2$

$a^2=c^2-b^2$

$a^2=c^2-b^2 \; a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{7,8^2-7,2^2}\text{ cm}=3\text{cm}$

Druhá odvěsna pravoúhlého trojúhelníku s přeponou 7,8 cm a odvěsnou 7,2 cm má délku 3 cm.



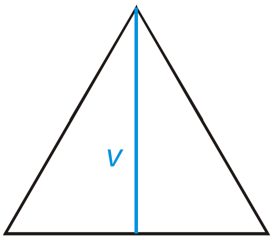


Zápis konstrukce:
1. AC, $|AC| = b = 7{,}2\,\text{cm}$
2. $\mapsto CX$, $CX \perp AC$
3. $k(A; 7{,}8\,\text{cm})$
4. $B \in CX \cap k$
5. $\triangle ABC$

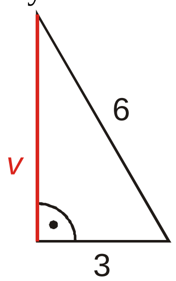
Měřením zjistíme, že délka strany CB je 3 cm.

Pedagogická poznámka: Následující příklady obsahují i starší poznatky (obsah trojúhelníku, procenta). Je třeba sledovat situaci ve třídě a pokud se u někoho vyskytují problémy, tlačit na jejich řešení.

Př. 5: Urči výšku a obsah rovnostranného trojúhelníku o straně 6 cm.



Výška rozdělí rovnostranný trojúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.



$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad / -b^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$v = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{6^2 - 3^2}\ \text{cm} = \sqrt{27} \doteq 5{,}2\,\text{cm}$$

Obsah trojúhelníku: $S = \dfrac{a \cdot v_a}{2} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{27}}{2}\text{cm}^2 = 3\sqrt{27}\,\text{cm}^2 \doteq 15{,}6\,\text{cm}^2$.

Rovnostranný trojúhelník o straně 6 cm, má výšku dlouhou přibližně 5,2 cm a obsah přibližně $15{,}6\,\text{cm}^2$.

Př. 6: Obyvatelé sídliště si zkracují cestu k autobusu přes trávník. O kolik procent si cestu zkrátí, jestliže chodník vedle parkoviště má od počátku zkratky k chodníku délku 90 m a chodník podél silnice ke konci zkratky délku 42 m?

Části chodníků se zkratkou tvoří pravoúhlý trojúhelník (chodníky tvoří odvěsny, zkratka přeponu).

$c^2 = a^2 + b^2 \quad / \sqrt{\ }$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{90^2 + 42^2}\ \text{m} = \sqrt{9864}\ \text{m} \doteq 99{,}3\,\text{m}$

Původní cesta: $90 + 42\ \text{m} = 132\,\text{m}$.
Zkrácení cesty: $132 - 99{,}3\ \text{m} = 32{,}7\,\text{m}$

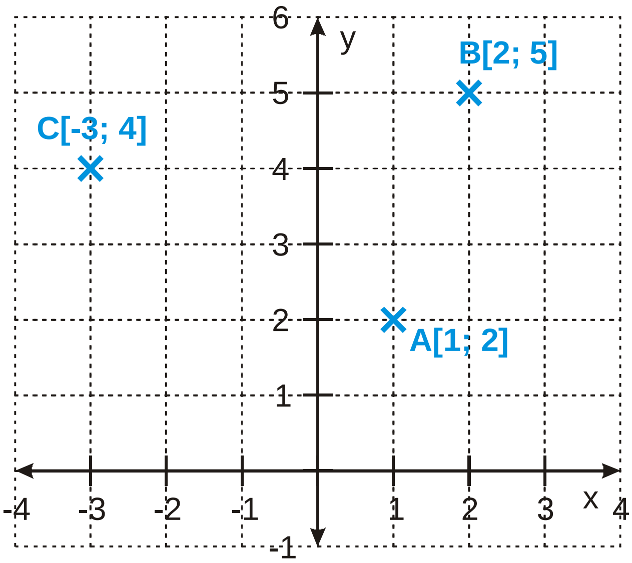
100 % … 132 m
x % … 32,7 m

$\frac{x}{32{,}7} = \frac{100}{132} \quad / \cdot 32{,}7$

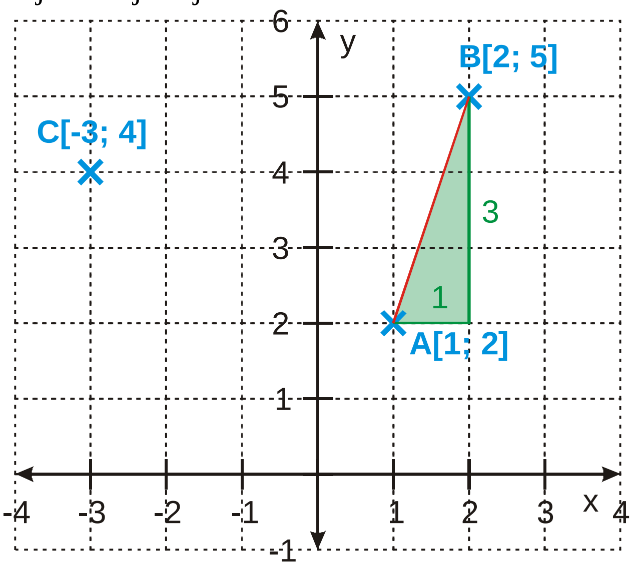
$x = \frac{100}{132} \cdot 32,7 \doteq 25$

Obyvatelé si cestu zkrátí o 25 %.

Př. 7: Vrcholy trojúhelníku *ABC* mají souřadnice $A[1;2]$, $B[2;5]$ a $C[-3;4]$. Zakresli body do soustavy souřadnic a urči délky stran trojúhelníku *ABC*.



Nejdříve zjišťujeme vzdálenost bodů *A* a *B* $\Rightarrow$ hledáme pravoúhlý trojúhelník.



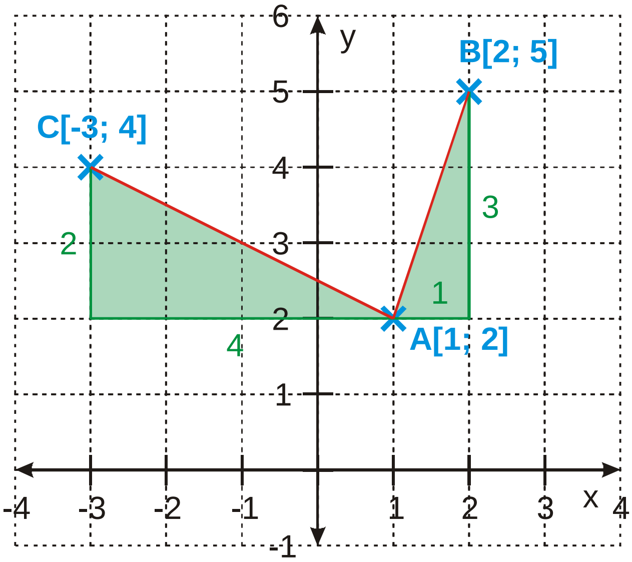
Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku:

- vodorovná (*x*-ové souřadnice): $2-1=1$,
- svislá (*y*-ové souřadnice): $5-2=3$.

Přepona: $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \doteq 3,2$.

$|AB| = \sqrt{10} \doteq 3,2$.

Vzdálenost *AC*



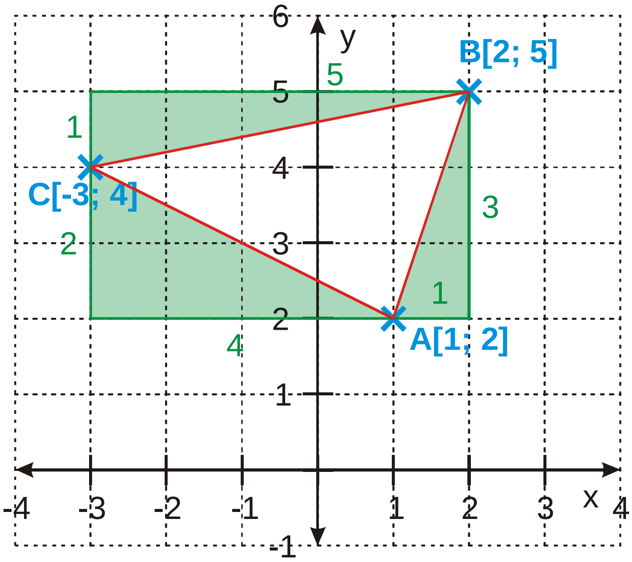
Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku:

- vodorovná (x-ové souřadnice): $1-(-3)=4$,
- svislá (y-ové souřadnice): $4-2=2$.

Přepona: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}\doteq 4,5$.

$|AC|=2\sqrt{5}\doteq 4,5$.

Vzdálenost BC



Odvěsny pravoúhlého trojúhelníku:

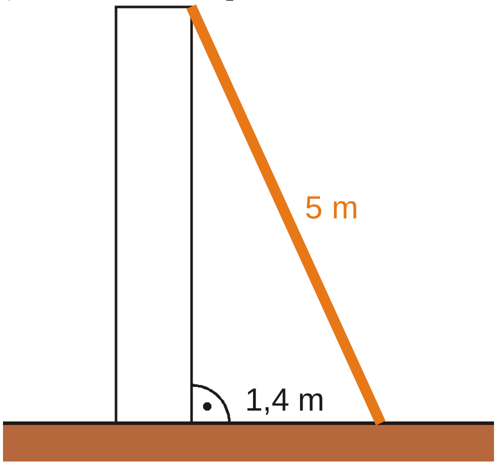
- vodorovná (x-ové souřadnice): $2-(-3)=5$,
- svislá (y-ové souřadnice): $5-4=1$.

Přepona: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}\doteq 5,1$.

$|BC|=\sqrt{26}\doteq 5,1$.

Př. 8: Jarda potřebuje změřit výšku zdi. Ví, že je větší než čtyři a půl metru, ale nižší než pět metrů. Bohužel nemá k dispozici ani žebřík ani dostatečně dlouhý pevný metr. Našel však na zahradě 5 m dlouhou střešní lať. Navrhni, jak pomocí latě a normálního zednického metru výšku zdi změřit. Svůj postup využij pro určení výšky zdi v případě, že Jarda naměří pomocí metru vzdálenost 1,4 m. Co musí být splněno, aby postup fungoval?

Jarda může opřít lať o zeď tak, aby se zdi dotýkala v jejím nejvyšším bodě. Vznikne tak, pravoúhlý trojúhelník, ve kterém Jarda může znát dvě strany: přeponu (lať) a jednu odvěsnu (vzdálenost mezi patou zdi a místem, kde se země dotýká opřená lať).



Pokud má postup fungovat, musí být zem u zdi vodorovná (abychom získali pravoúhlý trojúhelník).

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad / -b^2$

$a^2 = c^2 - b^2$

$a^2 = c^2 - b^2 \; a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 1,4^2}\ \text{m} = \sqrt{23,04}\ \text{m} = 4,8\ \text{m}$

Zeď je vysoká 4,8 m.

Shrnutí: Mnoho vzdáleností určíme tím, že v obrázku najdeme vhodný pravoúhlý trojúhelník a pomocí Pythagorovy věty určíme jednu ze stran.